ODREĐIVANJE PRESEKA POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI

SURFACE-SURFACE INTERSECTION IN COMPUTER GRAPHICS

Doc. dr Ratko Obradović, Fakultet tehničkih nauka, Institut za matematiku i fiziku u tehnici, Katedra za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku, Novi Sad

Rezime

U ovom radu dat je pregled nekoliko dominantnih metoda koje se koriste za određivanje preseka dveju krivih i dveju površi. Istaknute su algebarske metode, metode deljenja, diskretne metode i metode zasnovane na deskriptivno geometrijskom pristupu. Uočene su dobre osobine svake od navedenih metoda kao i njihovi prisutni nedostaci.

Ključne reči: presek površi, kompjuterska grafika

Summary

In this paper several dominate methods, which are using for determination of surface-surface intersection and intersection between two plane curves were represented. Algebraic methods, subdivision methods, discrete methods and descriptive geometric methods are given.

Key words: surface-surface intersection, computer graphics

1. UVOD

U mnogim aplikacijama potrebno je odrediti presečne tačke dveju krivih i presečne krive dveju površi:

- Za određivanje konture površi radi prikaza površi na grafičkom ekranu računara (Štulić 20, Obradović 13 i 14);
- Radi primene Bulovih operacija na solidima (Krishnan 9, Keyser 10 i 11);
- Kod konstruisanja glatkih prelaza (smooth blending) sa jedne na drugu površ, odnosno krivu;
- Za formiranje ordinatnih krivih i površi pomoću NC (numerically controlled) mašina;

Dobar algoritam za određivanje preseka treba da ima sledeće osobine:

- Tačnost, u numeričkom smislu;
- Korektnost,u smislu da je presek teoretski korektno određen;
- Brzinu;
- Samokontrolu, u smislu da nije potrebna interaktivna pomoć korisnika.

Može se reći da ne postoji jedinstveni algoritam koji je optimalan za sve četiri navedene osobine već postoji više različitih, a svaki od njih ima svoje dobre i loše karakteristike. Tip algoritma koji treba izabrati zavisi od načina na koji su zadate krive i površi (implicitni, eksplicitni, parametarski) uključujući i određene specifične osobine preseka. Moguće je izvršiti grupisanje postupaka u nekoliko dominantnih metoda za određivanje preseka dveju krivih i dveju površi:

- Algebarske metode;
- Metode deljenja;
- Diskretne metode;
- Deskriptivno geometrijske metode.

2. ALGEBARSKE METODE

2. 1. Direktna zamena

Kod korišćenja algebarskih metoda najjednostavniji matematički aparat je u slučaju određivanja preseka površi kada je jedna površ zadata u impicitnom obliku, a druga u parametarskoj formi:

$$\text{Površ } \phi_1 \cap \text{Površ } \phi_2$$

$$\phi_1 \colon f(x,z,y)=0 \qquad (1)$$

$$\phi_2 \colon \boldsymbol{X}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \qquad (2)$$

Podebljano (bold) slovo ***X*** pokazuje da se radi o vektoru. Kombinovanjem jednačina (1) i (2) dobija se $f\,(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=0$. Zatim se uzima da je $u = u_0$ i pronalazi se nula $v = v_i$ iz poslednje jednačine. Usvajajući jednak priraštaj za parametar u, određuju se nule v_i, odnosno presečne tačke dveju površi $X(u_K, v_i)$, koje kada se spoje formiraju aproksimaciju presečne krive.

Ako su obe površi zadate u parametarskom obliku tada jednačine jedne površi treba prevesti u implicitnu formu i ovaj postupak prevođenja se naziva implicitizacija (Salmon 17, Walker 21). Za površ koja je zadata parametarskim jednačinama

$$x = \frac{x(s,t)}{w(s,t)}, y = \frac{y(s,t)}{w(s,t)}, z = \frac{z(s,t)}{w(s,t)}$$

eliminacijom parametara t i s dobija se $f\,(x,y,z)=0$.

Problem predstavlja činjenica da nije uvek moguće izvršiti implicitizaciju mada postoje slučajevi kada se za površ koja je zadata u tačno određenom obliku parametarske forme može tvrditi da je imlicitizacija moguća. Pošto se može uspostaviti analogija između analize krivih i površi, posmatra se racionalna kriva $\boldsymbol{X}(t)=(x(t),y(t))$ gde su

$$x(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i t^i}{\sum_{i=0}^{n} c_i t^i} \qquad y(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i t^i}{\sum_{i=0}^{n} c_i t^i}$$

Kriva se može predstaviti u implicitnoj formi (Sedenberg 19) preko determinante oblika

$$f(x,y) = \begin{vmatrix} L_{n-1,n-1}(x,y) & \cdots & L_{0,n-1}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-1,0}(x,y) & \cdots & L_{0,0}(x,y) \end{vmatrix}$$

$$L_{ij}(x,y) = \alpha_{i,j}x + \beta_{i,j}y + \gamma_{i,j} = \sum_{\substack{l \le \min(i,j) \\ l+m=i+j+1}} (b_m c_l - c_m b_l)x + (a_l c_m - a_m c_l)y + (a_m b_l - a_l b_m)$$

Ponekad je potrebno za poznate vrednosti koordinata presečnih tačaka odrediti pridružene vrednosti parametara. Za presečnu tačku $P_0(x_0,y_0)$ dveju krivih koja leži na ravnoj krivoj $\boldsymbol{X}(t)$ radi određivanja parametra $t=t_0$ za koji je $\boldsymbol{X}(t_0)=P_0$ potrebno je rešiti linearan sistem jednačina (Sedenberg 19)

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} L_{0,0}(x,y) & \cdots & L_{0,n-1}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-1,0}(x,y) & \cdots & L_{n-1,n-1}(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{n-1} \\ t^{n-2} \\ \vdots \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Algoritam za sračunavanje presečnih tačaka dveju ravnih racionalnih polinomnih krivih stepena n_1 i n_2 koje su date u parametarskom obliku

$$X_1(t)=X_1(x(t),y(t)) \qquad X_2(\tau)=X_2(\xi(\tau),\eta(\tau))$$

$$x(t)=\frac{x_1(t)}{w_1(t)} \qquad \xi(\tau)=\frac{\xi_2(\tau)}{\omega_2(\tau)}$$

$$y(t)=\frac{y_1(t)}{w_1(t)} \qquad \eta(\tau)=\frac{\eta_2(\tau)}{\omega_2(\tau)}$$

$$0\le t\le 1 \qquad 0\le \tau\le 1$$

sastoji se od nekoliko koraka (Sedenberg 18 i 19):

- Određivanje implicitnog oblika $f_1(x,y,w)=0$ od $X_1(t)$, gde je w homogena koordinata;
- Zamena parametarskih jednačina za $X_2(\tau)$ u implicitnu formulu za $X_1(t)$ što dovodi do jednačine $f_1(\xi(\tau),\eta(\tau),\omega(\tau))=0$ koja je stepena n_1n_2;
- Sračunavanje realnih rešenja prethodne jednačine u intervalu $0\le\tau\le 1$;
- Korišćenje parametarskih jednačina $X_2(\tau)$ i vrednosti parametara τ_i sračunatih u prethodnom koraku, a koje odgovaraju presečnim tačkama $S_i=X_2(\tau_i)$, radi određivanja koordinata (x,y) presečnih tačaka;
- Polazeći od jednačina $S_i=X_1(t_i)$ određuju se vrednosti parametra t za presečne tačke, koji je u intervalu $0\le t\le 1$.

Presečna kriva bilo kakvih površi koje su zadate u parametarskoj formi može se odrediti korišćenjem algoritma (Hoschek 8) koji uključuje dvoparametarsku eliminaciju. Jedna površ je zadata sa

$$X_1(u,v)=X_1(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

a druga

$$X_2(\mu,\upsilon)=X_2(\xi(\mu,\upsilon),\eta(\mu,\upsilon),\zeta(\mu,\upsilon))$$

gde je

$$X_2(\mu,\upsilon)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}A_{ik}\mu^i\upsilon^k$$

$$\mu,\upsilon\in[0,1]$$

Neka su komponente vektora A_{ik} označene sa a_{ik}, b_{ik} i c_{ik}, tada se može uvesti smena

$$\alpha_{1k}(\mu)=\sum_{i=0}^{m}a_{ik}\mu^i \qquad \alpha_{2k}(\mu)=\sum_{i=0}^{m}b_{ik}\mu^i \qquad \alpha_{3k}(\mu)=\sum_{i=0}^{m}c_{ik}\mu^i$$

Presečna kriva dve površi opisana je pomoću tri jednačine

$$x(u,v)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_{1k}\upsilon^k=0 \qquad y(u,v)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_{2k}\upsilon^k=0 \qquad z(u,v)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_{3k}\upsilon^k=0$$

Ako se uvedu u razmatranje novi vektori

$$B_0=\begin{pmatrix} x(u,v)-\alpha_{10}(\mu) \\ y(u,v)-\alpha_{20}(\mu) \end{pmatrix};\ B_k=\begin{pmatrix} \alpha_{1k}(\mu) \\ \alpha_{2k}(\mu) \end{pmatrix};\ C_0=\begin{pmatrix} y(u,v)-\alpha_{20}(\mu) \\ z(u,v)-\alpha_{30}(\mu) \end{pmatrix};\ C_k=\begin{pmatrix} \alpha_{2k}(\mu) \\ \alpha_{3k}(\mu) \end{pmatrix}$$

tada je presečna kriva opisana izrazima

$$P=B_0-\sum_{k=1}^{n}B_k\upsilon^k=0 \qquad Q=C_0-\sum_{k=1}^{n}C_k\upsilon^k=0$$

Tačke presečne krive su zajedničke nule poslednje dve jednačine.

2.2. Teorija eliminacije

Jedan od najjednostavnijih problema preseka je određivanje preseka dva polinoma koji su funkcije jedne promenljive. Za polinome

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

formira se rezultanta (Walker 21) oblika

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_m \end{vmatrix}$$

sa m vrsta sa konstantama a, i n vrsta sa konstantama b.

Rezultanta se može koristiti za određivanje preseka dve ravne krive, koje su definisane pomoću polinoma

$$f(x,y) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad g(x,y) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

gde su a_i i b_j polinomi u funkciji od y. Za površi

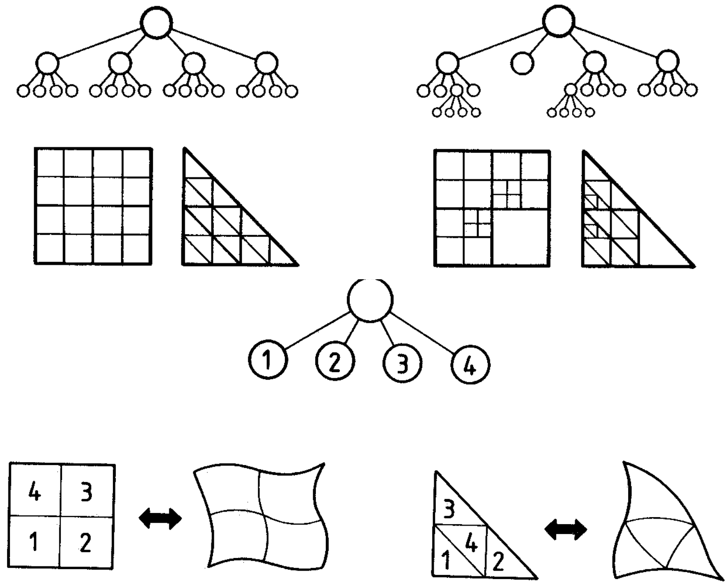
$$f(x,y,z) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad g(x,y,z) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

gde su a_i i b_j polinomi u funkciji od y i z, rezultanta određuje ravnu krivu koja leži u ravni *Oyz*. Time je problem određivanja tačaka prostorne presečne krive dveju površi redukovan na određivanje ravne krive, što je znatno jednostavniji problem (Garrity 5, Hartshorne 6).

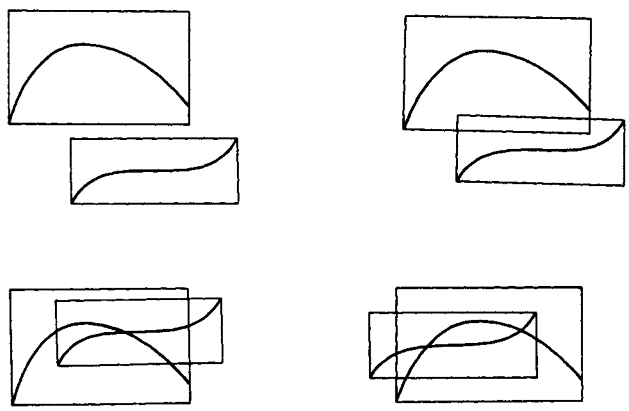
3. METODE DELJENJA

Kod algoritma deljenja (subdivision method), objekti (krive ili površi) se dele na više delova, a zatim se posmatra njihov presek. Najčešće se analiza pomoću sastavnih delova objekta koristi za aproksimativno određivanje presečnih tačaka dveju krivih. Raniji algoritmi su delili oba objekta uniformno i kompletno. Podela za krive je imala oblik uniformnog binarnog drveta, dok su površi deljene uniformno na četvrtine (Sl.1). Ako se dvoparametarska površ podeli na n četvorougaonih zakrpa u oba parametarska pravca tada će ona biti aproksimirana sa n^2 četvorougaonih zakrpa. Naivni algoritam bi tražio presek dve površi testirajući preseke svih zakrpa jedne površi sa zakrpama druge površi, što je ukupno n^4 mogućih preseka, dakle sigurno mnogo više od stvarnog broja zakrpa koje se međusobno seku. Adaptiran metod deljenja deli površ na delove koji se aproksimativno mogu smatrati delovima ravni, a to se postiže posmatranjem veličine lokalne krivine površi i deo površi sa malom krivinom se aproksimativno zamenjuje sa ravnom zakrpom. Ovakvi postupci su zahtevali znatnu memoriju računara i samim tim bili su spori i skupi.

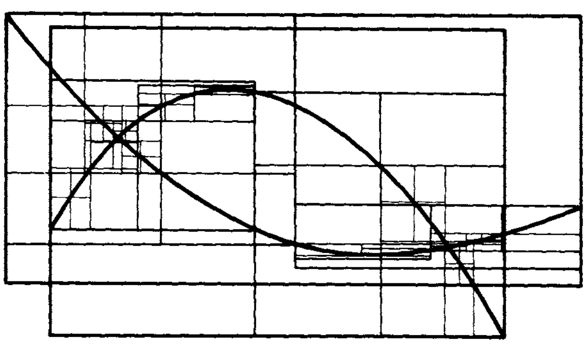
Značajna redukcija u kompjuterskom vremenu i kapacitetima memorije moguća je ukoliko se ubaci nekakav kriterijum koji će proceniti gde se mogući presek nalazi. U metodu deljenja koji su predložili Glaicher i Kass (Barnhill 1, Glaicher 4, de Figueirero 2) formiraju se granične kutije oko formiranih četvorougaonih zakrpa. Zatim se posmatra presek graničnih kutija jedne površi sa graničnim kutijama druge površi (takozvani test razdvajanja, Sl.2) i, za one parove kutija koji se ne seku, ne seku se ni zakrpe dveju površi unutar tih kutija. Ako se par graničnih kutija seče, tada se i pridružene zakrpe možda seku. U ovom slučaju posmatrane zakrpe se dele na manje, formiraju se novi skupovi graničnih kutija i postupak se ponavlja dok se sa određenom greškom ne odrede granične kutije u kojima se zakrpe seku i koje se tada aproksimativno proglašavaju tačkama presečne krive dveju površi.



Slika 1 Četvorougaona i trougaona struktura površi



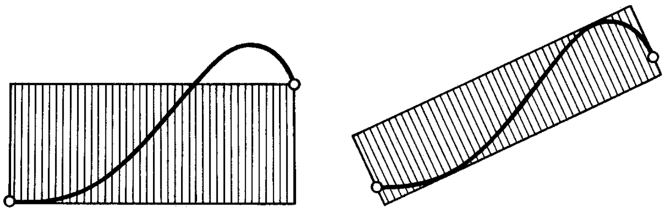
Slika 2 Test razdvajanja za četiri para krivih sa graničnim paralelogramima



Slika 3 Presek dveju krivih korišćenjem metoda "podeli i pobedi"
pomoću min-max paralelograma

Težnja da se ostvari uspešnije određivanje preseka dovela je do ideje da proces deljenja bude neuniforman i da sam algoritam bude adaptivan. Rezultat ovakvog postupka koji se naziva ″podeli i pobedi″ (devide-and-conquer) prikazan je, za slučaj preseka dveju ravnih krivih, na slici 3. Očigledno je da do porasta tačnosti uvek dovodi još jedno deljenje, a teškoće do kojih se dolazi primenom programa zavise isključivo od oblika preseka objekata.

Različiti slučajevi preseka dovode do različitih strategija u formiranju algoritma za deljenje, kao i različitih definicija graničnih kutija. Skoro svi postupci zahtevaju inicijalni račun pomoću kojeg se određuje nekoliko tačaka objekta koje će se koristiti za formiranje granične kutije. Za krivu se obično koriste dve krajnje tačke, a za površ četiri temena kvadratne prostorne strukture. Tako se min-max kutija definiše kao najmanja kutija čije su ivice paralelne sa koordinatnim osama i koje sadrže polazne tačke (Sl.4a).



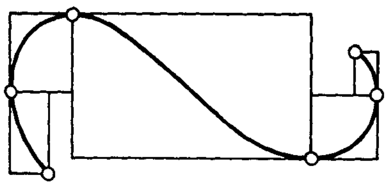
(a) *(b)*

Slika 4 (a) Min-max paralelogram definisan sa početnom i krajnjom tačkom krive; (b) Orijentisani granični paralelogram

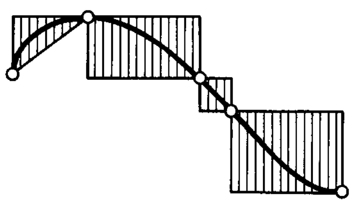
Bolji rezultati se dobijaju korišćenjem orijentisane kutije (Sl.4b) koja se dobija rotacijom min-max kutije, ali je njeno konstruisanje složenije i test razdvajanja je u ovom slučaju znatno komplikovaniji.

Neki autori (Koparkar 12), pre početka algoritma deljenja, predlažu jedan korak u kojem se određuju tačke na krivoj koje imaju horizontalne i vertikalne tangente, a zatim se ove tačke koriste za konstruisanje min-max kutija (Sl. 5).

Sličan pristup je kada se posmatraju tačke u kojima su izvodi i diferencijalno-geometrijske karakteristike, poput krivine i njenih izvoda, jednaki nuli (Farouki 3). Tada se ove tačke koriste za konstrukciju graničnih kutija i trouglova koji kompletno obuhvataju monotone segmente krive (Sl. 6).

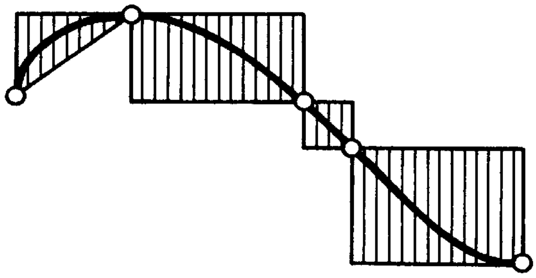


Slika 5 Koparkar-Mudur algoritam

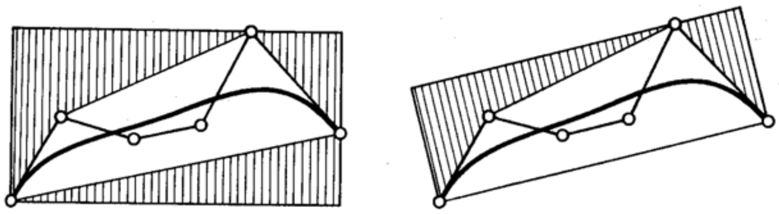


Slika 6 Farouki algoritam deljenja

Često su u CAGD u upotrebi krive i površi zadate u parametarskom obliku koje su definisane pomoću kontrolnih poligona (Herron 7) sa osobinama koje su slične Bezijeovim poligonima u Bezijeovim reprezentacijama. Oko kontrolnih poligona definišu se konveksni poligoni (Sl.7) i mali konveksni poligoni.



Slika 7 Konveksni poligoni (levo) i mali konveksni poligoni (desno) za kvadratne i kubne krive



(a) *(b)*

Slika 8 (a) Min-max kutija za Bezijeovu krivu; (b) Pravougaona traka za Bezijeovu krivu

Za objekte zadate u Bezijeovoj formi konstruiše se min-max kutija kao najmanji pravougaoni paralelopiped koji sadrži konveksni poligon (Sl.8a). Brže se konstruiše min-max kutija korišćenjem krajnjih tačaka Bezijeovog poligona (Sl. 8b). Pravougaona traka definisana je kao najmanji pravougaonik koji gradi konveksni poligon nad Bezijeovim tačkama, ako je jedna ivica konveksnog poligona paralelna sa linijom b_0b_n.
Za kvadratne i kubne krive moguće je formirati još manje pravougaone trake (Sl. 9).

4. DISKRETNE METODE

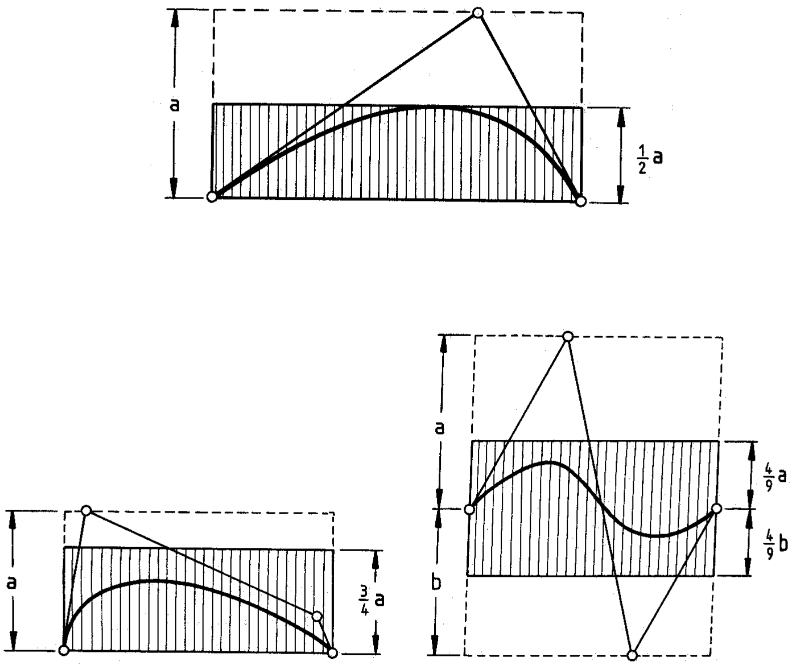
Dominantna su dva tipa diskretnih metoda:

- Parametarska diskretizacija
- Grid metod

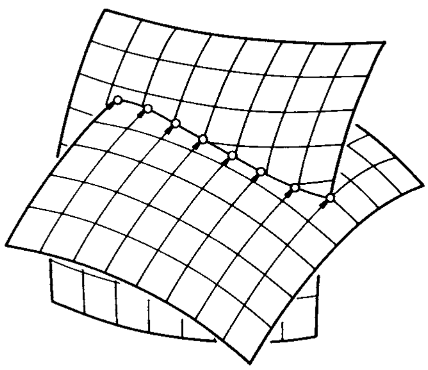
4.1. Parametarska diskretizacija

Problem određivanja preseka dveju površi sastoji se u određivanju sistema nelinearnih jednačina nezavisno od načina prezentacije površi. Svaka površ se diskretizuje, odnosno formira se mreža (grid) tako da je svaka tačka na površi opisana sa dva parametra. Presečna kriva dve površi određena je sa četiri parametra, jer je svaka površ definisana sa dva parametra, a presek se posmatra u koordinatnom sistemu koji ima tri ose. Tako opisan problem nije rešiv, stoga je potrebno izvršiti redukciju stepena slobode presečne krive sa četiri na tri što se postiže posmatranjem jedne površi kao skupa parametarskih krivih kod kojih je za svaku parametarsku krivu površi jedan parametar konstantan (Sl.10).

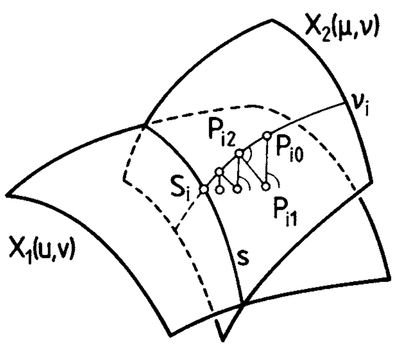
Neka je sa $\upsilon = \upsilon_i$ definisan skup parametarskih linija (Sl.11) na površi $X_2(\mu, \upsilon)$. Presečna kriva dveju površi biće određena kao skup prodornih tačaka posmatranog skupa parametarskih linija jedne površi kroz drugu, korišćenjem iterativnog projektujućeg metoda. Polazeći od tačke P_{i0} na površi $X_2(\mu, \upsilon)$ sa koordinatama $\mu = \eta_{i0}, \upsilon = \upsilon_i$ konstruiše se normala iz te tačke na površ $X_1(u, v)$. Normala prodire površ $\boldsymbol{X}_1$ u tački P_{i1} iz koje se postavlja normala na površ $\boldsymbol{X}_2$ koja prodire $\boldsymbol{X}_2$ u tački P_{i2}. Proces se prekida kada dužina normale spadne ispod neke male unapred zadate veličine.



Slika 9 Redukovane pravougaone trake za kvadratnu (gore) i kubne (dole) Bezijeove krive



Slika 10 Parametarska diskretizacija



Slika 11 Metod projekcije

Svaki algoritam obično sadrži sledeće faze:

- Faza traženja (search phase) ili lova (hunting phase);

- Faza traganja (tracing phase) ili hoda (marching phase);
- Faza sortiranja (sorting phase).

Faza traženja sadrži u sebi diskretni metod i u njoj se određuju ulazni podaci za fazu traganja. U fazi traganja se formira presečna kriva spajanjem tačaka presečne krive, a u poslednjoj fazi se analiziraju singulariteti, slučajevi kada se javlja čvorna tačka ili tačke gde presečna kriva dodiruje granice dveju površi.

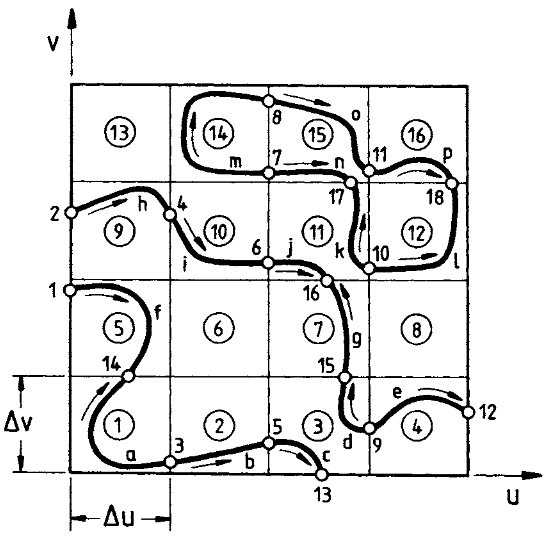
4.1.1. Faza traganja

Ulazni podatak za ovu fazu su tačke presečne krive koje su određene diskretnom metodom kao prodorne tačke parametarskih krivih $X_1(u,v)$ kroz površ $X_2(\mu,\nu)$. Sada je potrebno izvršiti spajanje tačaka, odnosno treba formirati presečnu krivu kao sumu njenih segmenata (Sl.12).

Ovo se postiže posmatranjem jednog po jednog dela (zakrpe) površi korišćenjem određene procedure; tako npr. na ivicama zakrpe 3 se nalaze tačke 5, 9, 13 i 15 i u razmatranju se polazi od tačke koja odgovara najmanjem broju. Tačka 5 se spaja sa jednom od preostalih tačaka segmentom *c* krive i te dve tačke; u ovom slučaju tačke 5 i 13 se više ne uzimaju u obzir. Preostale dve tačke 9 i 15 se spajaju segmentom *d* krive polazeći od tačke 9 jer se poštuje zadati uslov za spajanje tačaka.

Očigledno je da je tačka 5 mogla biti spojena i sa tačkama 9 ili 13, stoga je potrebno definisati nekakav kriterijum prvenstva za spajanje tačaka. Kod ovog problema u pomoć dolazi diferencijalna geometrija pomoću koje se u problematičnoj tački $X_1(u_0,v_0)=X_2(\mu_0,\nu_0)$ presečne krive konstruiše tangenta (Sl.13), korišćenjem jednačine

$$T_0 = N_1(u_0,v_0)\times N_2(\mu_0,\upsilon_0)$$



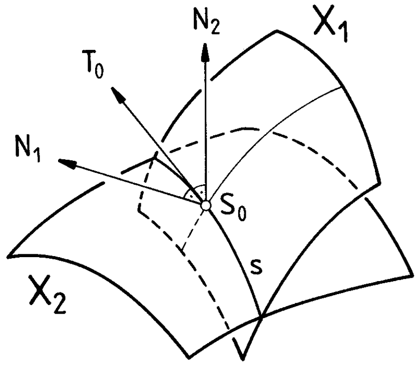
Slika 12 Mreža parametarskih krivih na površi $X_1(u,v)$ sa presečnim tačkama 1, ..., 18 na izoparametarskim krivim linijama površi X_1 i kompozitna presečna kriva površi X_1 i X_2 koja se sastoji od segmenata a, ..., p

Tangenta je upravna na normale obe površi u posmatranoj tački, a presečna kriva se prostire u pravcu tangente.

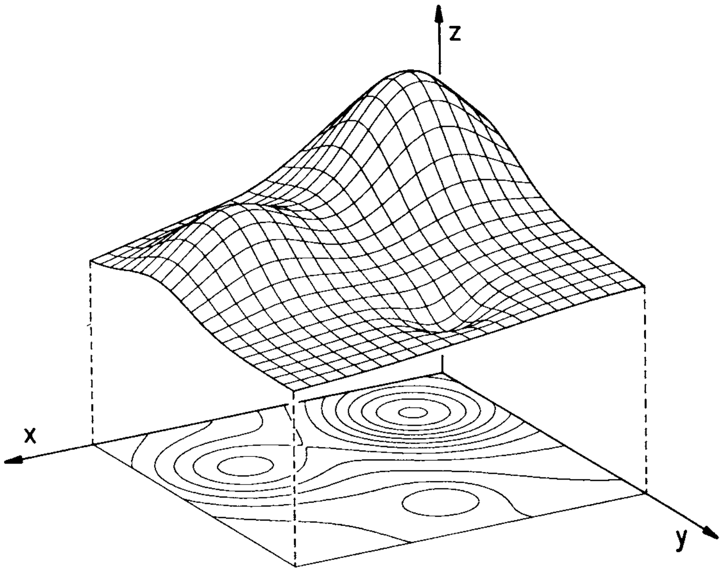
4.2. Grid metod

Ovaj metod se koristi kao osnovni korak za određivanje presečne krive dveju površi, prateći sledeću ideju: za dvoparametarsku površ koja je zadata tačkama $X(u_i,v_j)$ određuju se izohipse (isolines; potential lines ili level curves). Tačke izohipse (Sl.14) na visini z_0 su tačke prodora parametarskih krivih površi kroz horizontalnu ravan koja se nalazi na posmatranoj visini i dobijaju se rešavanjem jednačina

$$X(u_i, v) = z_0$$
$$X(u, v_i) = z_0$$

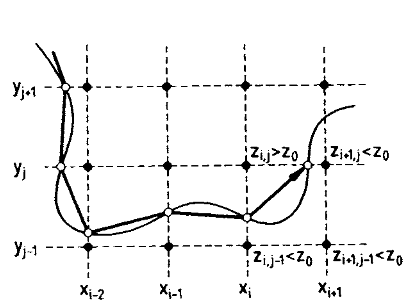


Slika 13 Tangenta presečne krive



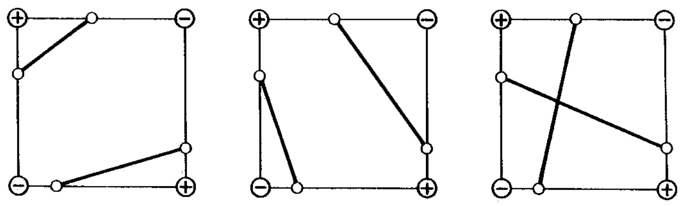
Slika 14 Aksonometrija dvoparametarske površi, njena oblast i izohipse

Za spajanje tačaka jedne izohipse polazi se od činjenice da izohipsa koja ulazi u jednu ćeliju mreže presecanjem jedne ivice te ćelije, mora napustiti tu ćeliju presecanjem bilo koje njene ivice. Izlazna tačka izohipse iz te ćelije služi kao ulazna tačka u sledeću ćeliju, a sama izohipsa može se aproksimativno dobiti spajanjem pomoću duži ulazne i izlazne tačke za svaku ćeliju (Sl.15).

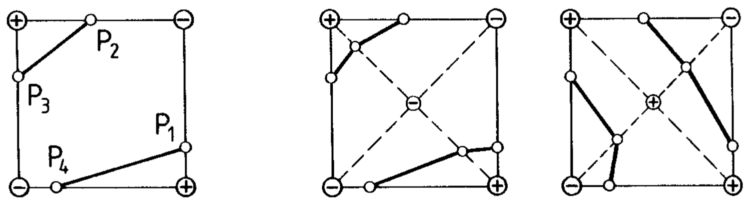


Slika 15 Konstrukcija izohipse pomoću grid metode

Slučajevi kada izohipsa prolazi kroz temene tačke ćelija ili kada se delom poklapa sa ivicom ćelije zahtevaju dodatna razmatranja. Takođe je interesantno posmatrati izohipsu koja unutar jedne ćelije ima samopresečnu tačku, zatim slučaj kada se ulazna i izlazna tačka izohipse nalaze na istoj ivici ćelije, ili kada izohipsa seče sve četiri ivice ćelije. Poslednji slučaj predstavlja problem četiri tačke (four-point problem) kod koga je potrebno utvrditi uslove koji će garantovati da će algoritam (Pratt 15, Petrie 16) davati uvek isti rezultat bez obzira na izbor polazne tačke ili ivice ćelije (Sl.16).
Uslov za spajanje bi bio: za proizvoljno izabranu jednu od četiri tačke koja je na ivici *a* ona se uvek spaja sa tačkom koja leži na ivici *b*, ako ivice *a* i *b* imaju zajedničko teme i ako je vrednost funkcije površi u tom temenu veća od z_0 (Sl.17).



Slika 16 Problem četiri tačke: mogući slučajevi



Slika 17 Spajanje tačaka i spajanje tačaka posle nove podele na četiri trougla

Alternativni pristup se dobija kada se ćelija crtanjem dijagonala podeli na četiri trougla i kada se tački u preseku dijagonala dodeli teme koje je na manjoj ili većoj visini od z_0. Kada se odrede izohipse obe površi tada se presecanjem izohipsi koje su na istoj visini dobijaju tačke presečne krive posmatranih površi.

5. DESKRIPTIVNO GEOMETRIJSKE METODE

Ove metode su korišćene za određivanje međusobnog preseka dveju pravoizvodnih površi (Obradović 13) i tada je za određivanje presečne krive korišćen matematički model koji je zasnovan na korišćenju pomoćnih ravni. Pri rešavanju opšteg slučaja, odnosno određivanju presečne krive dveju rotacionih površi korišćene su pomoćne ravni (Obradović 14), ali i pomoćne lopte i treba istaći da su rešenja dobijena primenom metoda koja su u osnovi zasnovana na deskriptivno geometrijskim pristupima izuzetno tačna i da sam rezultat ima realističan izgled.

LITERATURA

1. Barnhill, R.E., Kersey, S.N., A Marching Method for Parametric Surface / Surface Intersection, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 7, No. 1-4, pp. 257-280, 1990.
2. de Figueirero, L.H., Surface Intersection Using Affine Arithmetic, *Computer Systems Group, Department of Computer Science*, University of Waterloo, Ontario, Canada, 8 pages, 1993.
3. Farouki, R.T., Hierarchical Segmentations of Algebraic Curves and Some Applications. In Lyche, T., L.L., Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, *Academic Press*, pp. 207-214, 1989.

4. Glaicher, M., Kass, M., An interval refinement technique for surface intersection, *Proccedings of technique for surface intersection*, pp. 242-249, 1992.
5. Garrity, T., Warren, J., On computing the intersection of a pair of algebraic surfaces, Computer Aided Geometric Design 6, pp. 137-153, 1989.
6. Hartshorne, R., Algebraic Geometry, *Springer Verlag*, New York, 1977.
7. Herron, G., Polynomial bases for quadratic and cubic polynomials whics yield control points with small convex hulls, *Computer Aided Geometric Design 6*, pp. 1-9, 1989.
8. Hoschek, J., Lasser, D., Fundamentals of Computer Aided Geometric Design, *A K Peters*, Wellesley, Massachusetts, 1993.
9. Krishnan, S., Efficient and accurate Boundary Evaluation Algorithms for Boolean Combinations of Sculptured Solids, *PhD dissertation*, University of North Carolina at Chapel Hill, Department of Computer Science, 1997.
10. Keyser, J., Krishnan, S., Manocha, D., Efficient and Accurate B-rep Generation of Low Degree Sculptured Solids using Exact Arithmetic, *Proceedings of ACM Solid Modeling '97*, pp. 42-55, 1997.
11. Keyser, J., Krishnan, S., Manocha, D., Efficient B-rep Generation of Low Degree Sculptured Solids using Exact Arithmetic, *Proceedings of ACM Solid Modeling '97*, 35 pages, 1997.
12. Koparkar, P.A., Mudur, S.P., A new class of algorithms for the processing of parametric curves, *Computer Aided Design 15*, pp. 41-45, 1983.
13. Obradović R., Primena deskriptivno geometrijskih metoda u geometrijskom dizajnu pomoću računara: određivanje preseka paraboličkih kvadrika -konusa i cilindara, *Magistarska teza*, Univerzitet u novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1997.
14. Obradović R., Deskriptivno geometrijske metode u kompjuterskoj grafici: međusobni preseci rotacionih površi korišćenjem pomoćnih lopti i pomoćnih ravni, *Doktorska disertacija*, Univerzitet u novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2000.
15. Pratt, M.J., Geisow, A.D., Surface/surface intersection problems. In Gregory, J.A., The Mathematics of Surfaces, *Clarendon Press*, pp. 117-142, 1986.
16. Petrie, G., Kennie, T.J.M., Terrain modelling in surveying and civil engineering, *Computer Aided Design 19*, pp. 171-187, 1987.
17. Salmon, G., Lessons Introducing to the Modern Higher Algebra, *Reprinted by Chelsea*, New York, 1985.
18. Sedenberg, Th.W., Planar piecewise algebraic curves, *Computer Aided Geometric Design 1*, pp. 241-255, 1984.
19. Sedenberg, Th.W., Algebraic geometry for surface and solid modeling. In Farin, G., Geometric Modeling, *Algorithms and New Trends, SIAM*, pp. 28-42, 1987.
20. Štulić, R., Nacrtno geometrijske metode u kompjuterskoj grafici: konture i izofote rotacionih površi, *Magistarska teza*, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1994.
21. Walker, R.J., Algebraic Curves, *Princeton University Press*, 1950.

Zahvalnost
Autor želi da izrazi svoju zahvalnost Ministarstvu za nauku, tehnologije i razvoj Republike Srbije koje je preko projekta Sinteza i razvoj geometrijskih znanja za unapređenje vizualizacije i prikazivanja prostornih konfiguracija (projekat broj 1819) podržalo autora.

Adresa za kontakt:
Doc. dr Ratko Obradović
Fakultet tehničkih nauka, Institut za matematiku i fiziku u tehnici
Trg Dositeja Obradovića 6, 21121 Novi Sad, E-mail: obrad_r@uns.ns.ac.yu